JJ-1266

B.Sc. (Part - I)

Term End Examination, 2019

MATHEMATICS

Paper - I

Algebra and Trigonometry

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) निम्नलिखित आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए और इसकी जाति ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix in the normal form and find its rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(*b*) दर्शाइए कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह को अद्वितीय रूप से $P + iQ$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ P तथा Q हर्मिटीय आव्यूह हैं।

Show that every square matrix can be uniquely expressed as $P + iQ$, where P and Q are Hermitian matrix.

(*c*) आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल और संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

Determine the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) ज्ञात कीजिए कि λ तथा μ के किन मानों के लिए समीकरणों

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + \lambda z = \mu$$
$$x + 2y + 3z = 10$$

का

(*i*) कोई हल नहीं,

(*ii*) एक अद्वितीय हल,

(*iii*) अनन्त हल होंगे।

Investigate for what values of λ and μ, the equations

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + \lambda z = \mu$$
$$x + 2y + 3z = 10$$

has

(*i*) no solution,

(*ii*) a unique solution,

(*iii*) an infinity of solutions.

(*b*) भागफल और शेषफल ज्ञात कीजिए जब बहुपद $3x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ को $x - 3$ से मॉड्यूलो 5 के अन्तर्गत भाग दिया जाता है।

Find the quotient and remainder under modulo 5, when $3x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ is divided by $x - 3$.

(*c*) कार्डन विधि से घन समीकरण $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ को हल कीजिए।

Solve the cubic equation $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ by Cardon's method.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) तुल्यता संबंध की परिभाषा दीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि संबंध $a \equiv b \pmod{m}$, समस्त पूर्णांकों के समुच्चय I में एक तुल्यता संबंध है, जहाँ $a, b \in I$।

Define equivalance relation and prove that the relation $a \equiv b \pmod{m}$, in the set of all integers I is an equivalance relation, where $a, b \in I$.

(*b*) यदि H_1 और H_2 एक समूह G के दो उपसमूह हैं, तब $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमूह होगा।

H_1 and H_2 are subgroups of a group G, then $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G.

(c) क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए तथा इस क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

Find the inverse of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ and write this permutation as the product of disjoint cycles.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सिद्ध कीजिए कि समान कोटि के दो चक्रीय समूह तुल्यकारी होते हैं।

Prove that the two cyclic groups of equal orders are isomorphic.

(*b*) क्रमविनिमेय वलय की परिभाषा लिखिए तथा एक उदाहरण दीजिए।

Define commutative ring and give an example.

(*c*) दर्शाइए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रांत होता है।

Show that every field is an integral domain.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) यदि n कोई धन पूर्णांक हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n+\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$$

If n is any positive integer, then prove that

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n+\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$$

(*b*) यदि $A+iB=C\ \tan(x+iy)$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\tan 2x=\frac{2CA}{C^2-A^2-B^2}$$

If $A + iB = C \tan(x + iy)$, then prove that

$$\tan 2x = \frac{2CA}{C^2 - A^2 - B^2}$$

(c) सिद्ध कीजिए कि :

$$\log\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = 2i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Prove that :

$$\log\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = 2i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$

JJ-1268

B.Sc. (Part - I)

Term End Examination, 2019

MATHEMATICS

Paper - III

Vector Analysis and Geometry

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) सिद्ध कीजिए कि

$$i \times (a \times i) + j \times (a \times j) + k \times (a \times k) = 2a$$

Prove that

$$i \times (a \times i) + j \times (a \times j) + k \times (a \times k) = 2a$$

(*b*) पृष्ठों $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ और $z = x^2 + y^2 - 3$ के बीच का कोण बिन्दु $(2, -1, 2)$ पर ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at the point $(2, -1, 2)$.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि

$$\text{div} \cdot \text{grad}\, r^m = m(m+1)r^{m-2}$$

Prove that

$$\text{div} \cdot \text{grad}\, r^m = m(m+1)r^{m-2}$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) यदि $r(t) = 5t^2 i + tj - t^3 k$, तो दर्शाइए कि

$$\int_1^2 r \times \frac{d^2 r}{dt^2} dt = -14i + 75j - 15k$$

If $r(t) = 5t^2 i + tj - t^3 k$, then show that

$$\int_1^2 r \times \frac{d^2 r}{dt^2} dt = -14i + 75j - 15k$$

(*b*) $\int_C F \cdot dr$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ $F = xyi + (x^2 + y^2)j$ तथा C, xy-समतल में वक्र $y = x^2 - 4$ का चाप $(2, 0)$ से $(4, 12)$ तक है।

Evaluate $\int_C F \cdot dr$, where $F = xyi + (x^2 + y^2)j$ and the curve C is $y = x^2 - 4$ in the xy-plane from $(2, 0)$ to $(4, 12)$.

(*c*) मूल्यांकन कीजिए

$$\iint_S \left(y^2z^2i + z^2x^2j + z^2y^2k\right) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का वह पृष्ठ है जो xy समतल के ऊपर है।

Evaluate

$$\iint_S \left(y^2z^2i + z^2x^2j + z^2y^2k\right) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Where S is on the upper half of xy-plane of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

इकाई / Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए कि परवलय $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(bx+ay-ab)^2$ का नाभिलम्ब $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ है।

Show that the latus-rectum of the parabola $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(bx+ay-ab)^2$ is $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(b) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से होकर जाता है और वृत्तों $x^2+y^2-6x+8=0$ एवं $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ को लम्बवत प्रतिच्छेद करता है।

Find the equation of the circle passing through the origin and cut the circles $x^2+y^2-6x+8=0$ and $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ orthogonally.

(c) यदि PSP' शांकव $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ की एक नाभिगत जीवा है जिसकी नाभि S है, दर्शाइए कि $\frac{1}{SP}+\frac{1}{SP'}=\frac{2}{l}$

If PSP' is the focal chord of a conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, whose focus is S, then show that $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 2, 3) (–2, 1, – 4) (3, 4, –2) हैं।

Find the area of the triangle whose vertices are (1, 2, 3) (–2, 1, – 4) (3, 4, –2).

(*b*) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$ रेखाओं के मध्य न्युनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$.

(*c*) दर्शाइये कि $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 1$ उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण है जिसका जनक वक्र बिन्दुओं $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ और $C(0, 0, 1)$ से जाने वाला एक वृत्त है।

Show that the equation of the right circular cylinder described on the circle through the points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ and $C(0, 0, 1)$ as the guiding curve is $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 1$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) अतिपरवलयज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के उन स्पर्शी समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरलरेखा $x + 9y - 3z = 0,\ 3x - 3y + 6z = 5$ से होकर जाता है।

Find the equation to the tangent planes to the hyperboloid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which pass through the line $x + 9y - 3z = 0,\ 3x - 3y + 6z = 5$.

(*b*) परवलयज $ax^2 + by^2 = 2cz$, को समतल $lx + my + nz = P$ द्वारा स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

To find the condition that the plane $lx + my + nz = P$ may touch the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$.

(*c*) समीकरण

$$3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$$

का समानयन प्रमाणित रूप में कीजिए।

Reduce the equation to the standard form

$$3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$$